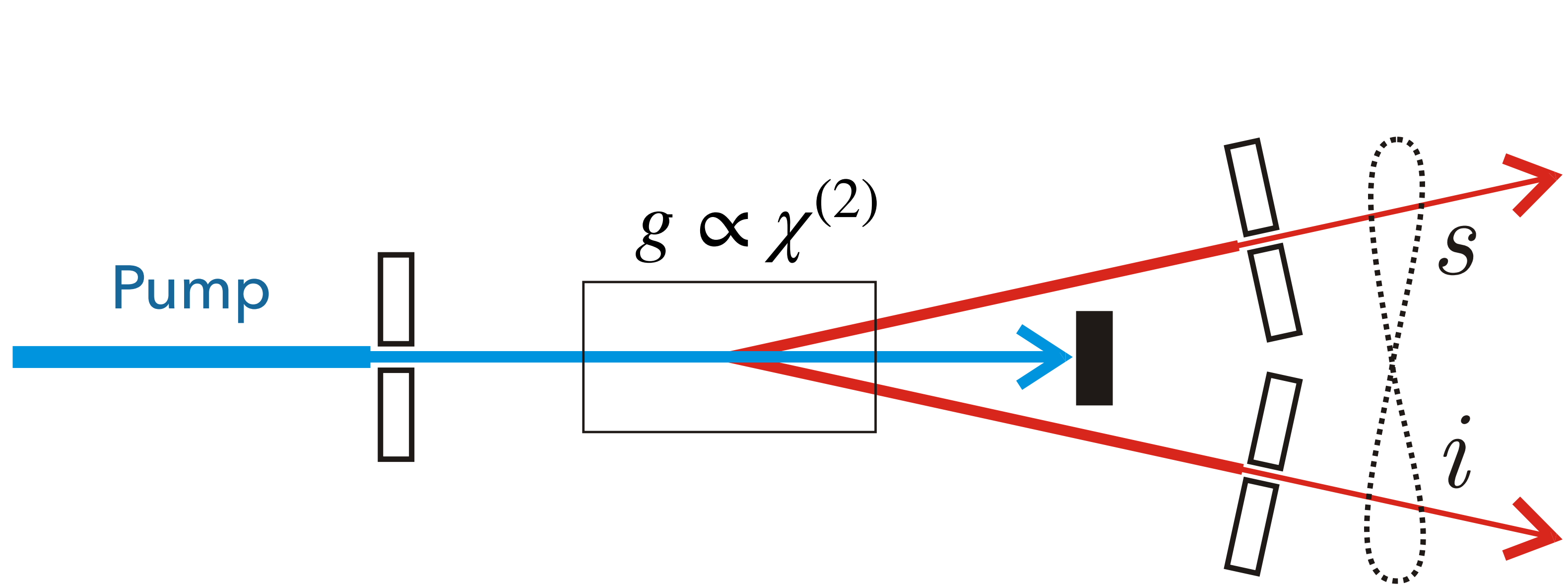
# "Влияние некогерентной накачки на свойства запутанности фотонов в процессе оптического рассеяния”

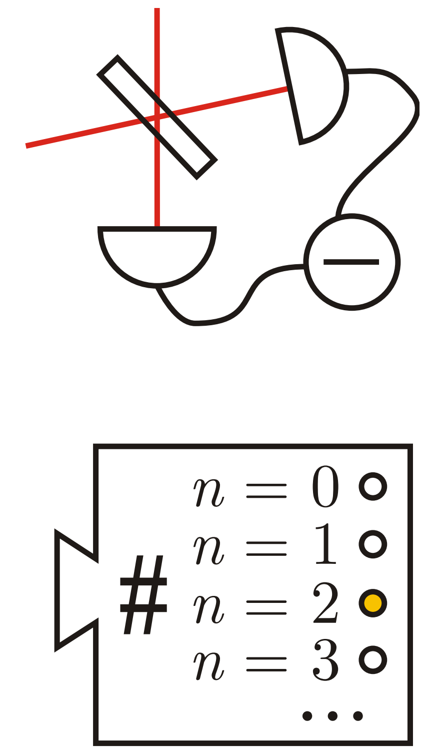
С.В. ВИНЦКЕВИЧ Д.А. ГРИГОРЬЕВ С.Н. ФИЛИППОВ

Effect of an incoherent pump on two-mode entanglement in optical parametric generation

S. V. Vintskevich, D. A. Grigoriev, and S. N. Filippov Phys. Rev. A **100**, 053811 (2019)

# ВВЕДЕНИЕ : ПРОЦЕСС ОПТИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ (РАССЕЯНИЯ)




1. $\omega_p = \omega_i + \omega_s$ 2. $\vec{k}_p \approx \vec{k}_i + \vec{k}_s$ 3. $L,\ n_{o.e}(\omega)$

4. Пр.-вр. когерентность накачки

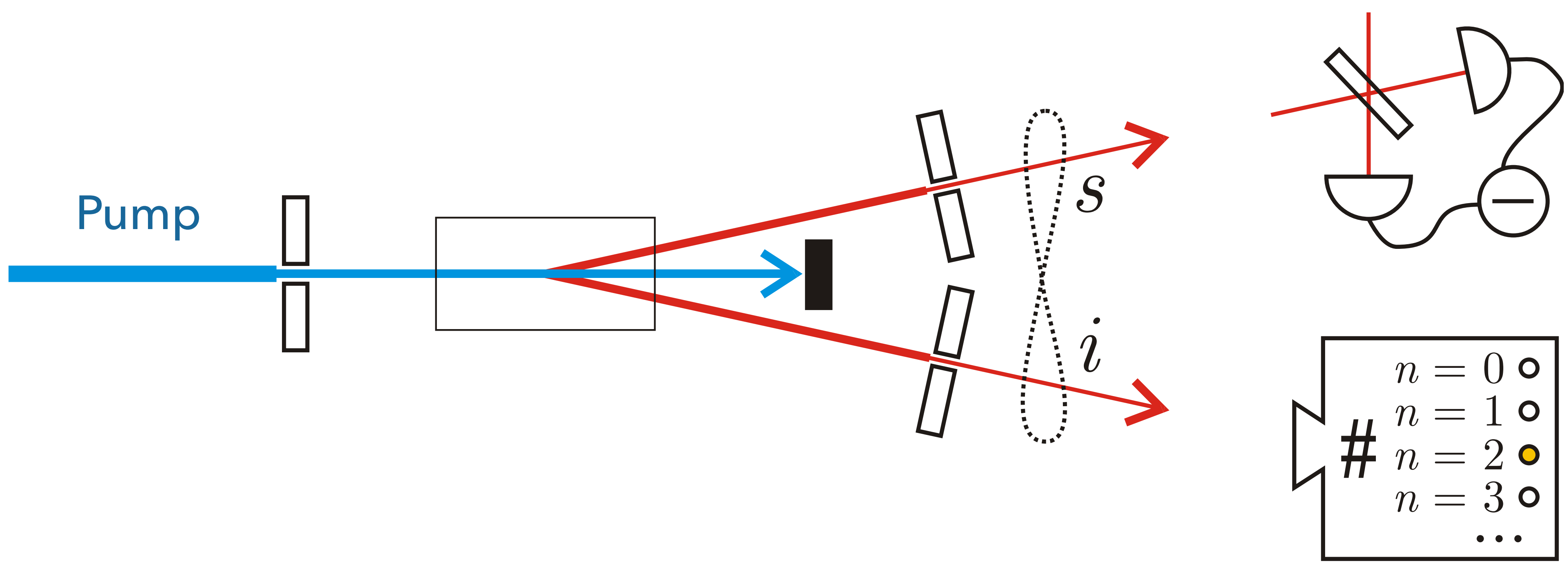
$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha,\beta=H,V} \int d\vec{k}_i d\vec{k}_s F(\vec{k}_i, \alpha; \vec{k}_s, \beta) a^{\dagger}_{\vec{k}_i,\alpha} a^{\dagger}_{\vec{k}_s,\beta} |\mathrm{vac}\rangle,$$

Бифотоны. Не учитывается вклад вакуума. Не учитывается вклад оставшейся части пр.-ва Фока

$$\varrho_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} = \int_{\Omega} d\vec{k}_i d\vec{k}_s F(\vec{k}_i, \alpha; \vec{k}_s, \beta) F^*(\vec{k}_i, \alpha'; \vec{k}_s, \beta') \times |\alpha, \beta\rangle\langle\alpha', \beta'|,$$

Типичный пример DV - состояния (пол. кубиты)

# ВВЕДЕНИЕ : ПРОЦЕСС ОПТИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ (РАССЕЯНИЯ)




Использование гомодинного детектирования и измерений разрешающих число фотонов

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta=H,V} \int d\vec{k}_i d\vec{k}_s F_n(\vec{k}_i, \alpha; \vec{k}_s, \beta)$$

$$\times (a^{\dagger}_{\vec{k}_i,\alpha})^n (a^{\dagger}_{\vec{k}_s,\beta})^n |\mathrm{vac}\rangle. \quad c_n = n! F_n(\vec{k}_i, \alpha; \vec{k}_s, \beta)$$

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n_i n_s\rangle}$$

# ВВЕДЕНИЕ : ПРОЦЕСС ОПТИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n_i n_s\rangle$$

"Квадратурные" операторы: $\hat{X}|x> = x|x>$ **CV-ENT**

$$\hat{X}_{i.s} = \frac{a_{i.s}^{\dagger} + a_{i.s}}{\sqrt{2}} \quad \hat{P}_{i.s} = \frac{a_{i.s}^{\dagger} - a_{i.s}}{i\sqrt{2}} \quad \psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)\psi_n(y)$$

**TMSV** $c_n = \dfrac{\tanh(r)^n}{\cosh(r)}$ $r = gt\sqrt{\bar{n}}$ $< n_i > = < n_s > \approx 0.6 - 1.3$

- Неоднородности, потери - шумы: состояние $\varrho_{i,s}$ не является чистым, имеет место деградация запутанности.
- В работе мы фокусируемся на некогерентной накачке. Состояние накачки описывается с помощью функции Глаубера-Сударшана:

$$\varrho_p = \int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha$$

# ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ОБОБЩ. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

- Гамильтониан

$$H_{\text{int}} = g(a_p a_i^\dagger a_s^\dagger + a_p^\dagger a_i a_s) \qquad U_t = \exp\left(-iH_{\text{int}}t\right)$$

- Эволюция общего состояния накачка + i-s фотоны

$$\varrho(t) = U_t \varrho_p \otimes |0_i 0_s\rangle\langle 0_i 0_s| \, U_t^\dagger = \int P(\alpha) |\psi_\alpha(t)\rangle\langle\psi_\alpha(t)| \, d^2\alpha. \quad \longrightarrow \quad \varrho_{is}(t) = \mathrm{tr}_p \varrho(t)$$

# ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ОБОБЩ. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

- Теория возмущений $\boxed{gt \ll 1}$

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \left(I - itH_{\text{int}} - \frac{t^2}{2}H_{\text{int}}^2 + \cdots\right)|\alpha\rangle|0_i0_s\rangle = |\alpha\rangle|0_i0_s\rangle - igt\alpha|\alpha\rangle|1_i1_s\rangle \; -$$

$$-\frac{\alpha g^2t^2}{2}(2\alpha|\alpha\rangle|2_i2_s\rangle + |\phi_\alpha\rangle|0_i0_s\rangle) + o(g^2t^2)$$

- Результирующее состояние $\{\,|0_i0_s>,|1_i1_s>,|2_i2_s>\,\}$

$$\varrho_{is} = \begin{pmatrix} 1 - g^2t^2c_{11} & igt\,c_{01} & -g^2t^2c_{02} \\ -igt\,c_{01}^* & g^2t^2c_{11} & o(g^2t^2) \\ -g^2t^2c_{02}^* & o(g^2t^2) & o(g^2t^2) \end{pmatrix}$$

$$c_{mn} = \int P(\alpha)\alpha^m(\alpha^*)^n d^2\alpha$$

$$= \int_0^\infty d|\alpha| \int_0^{2\pi} d\theta P(|\alpha|e^{i\theta})|\alpha|^{m+n+1}e^{i\theta(m-n)}.$$

# ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ОБОБЩ. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

$$|\psi_{is}\rangle = \sqrt{1-|\lambda(\alpha)|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(\alpha)|n_i n_s\rangle$$

$$\varrho_{is} = \sum_{n,m=0}^{\infty}\varrho_{is}^{nm}|n_i n_s\rangle\langle m_i m_s|$$

$$\lambda(\alpha) = -ie^{i\theta}\tanh gt|\alpha| = -i\frac{\alpha}{|\alpha|}\tanh gt|\alpha|.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varrho_{is}^{\alpha} &= [1-|\lambda(\alpha)|^2]\sum_{n,m=0}^{\infty}\lambda^n(\alpha)[\lambda^m(\alpha)]^*|n_i n_s\rangle\langle m_i m_s| \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(-ie^{i\theta})^{n-m}\tanh^{n+m}gt|\alpha|}{\cosh^2 gt|\alpha|}|n_i n_s\rangle\langle m_i m_s|\,.\end{aligned}}$$

## Обобщённое параметрическое приближение

$$a)\int P(\alpha)|\alpha|^2 d^2\alpha \gg 1,$$

a) Большая интенсивность накачки.

$$b)\qquad gt \ll 1,$$

b,c) Слабое взаимодействие; короткие времена. Пренебрегаем истощением накачки

$$c)\ 2\int P(\alpha)\sinh^2(gt|\alpha|)d^2\alpha \ll \int P(\alpha)|\alpha|^2 d^2\alpha,$$

$$d)\qquad gt\exp\left(4gt\sqrt{\int P(\alpha)|\alpha|^2 d^2\alpha}\right) \ll 1.$$

b,c) Число рождённых фотонов мало

d) Пропагатор - медленно меняющаяся функция амплитуды накачки на выходе

# ХАРАКТЕРИСТИКИ СОСТОЯНИЯ. ЧИСТОТА И ЗАПУТАННОСТЬ.

$$S_L = 1 - \mathrm{tr}\left[\varrho_{is}^2\right] \quad N = \frac{\left\|\varrho_{is}^{T_s}\right\|_1 - 1}{2} \quad N = \sum_{m<n} \left|\varrho_{is}^{nm}\right|$$

$$g^2 t^2 \mathrm{tr}[\varrho_p a_p^\dagger a_p] \ll 1$$

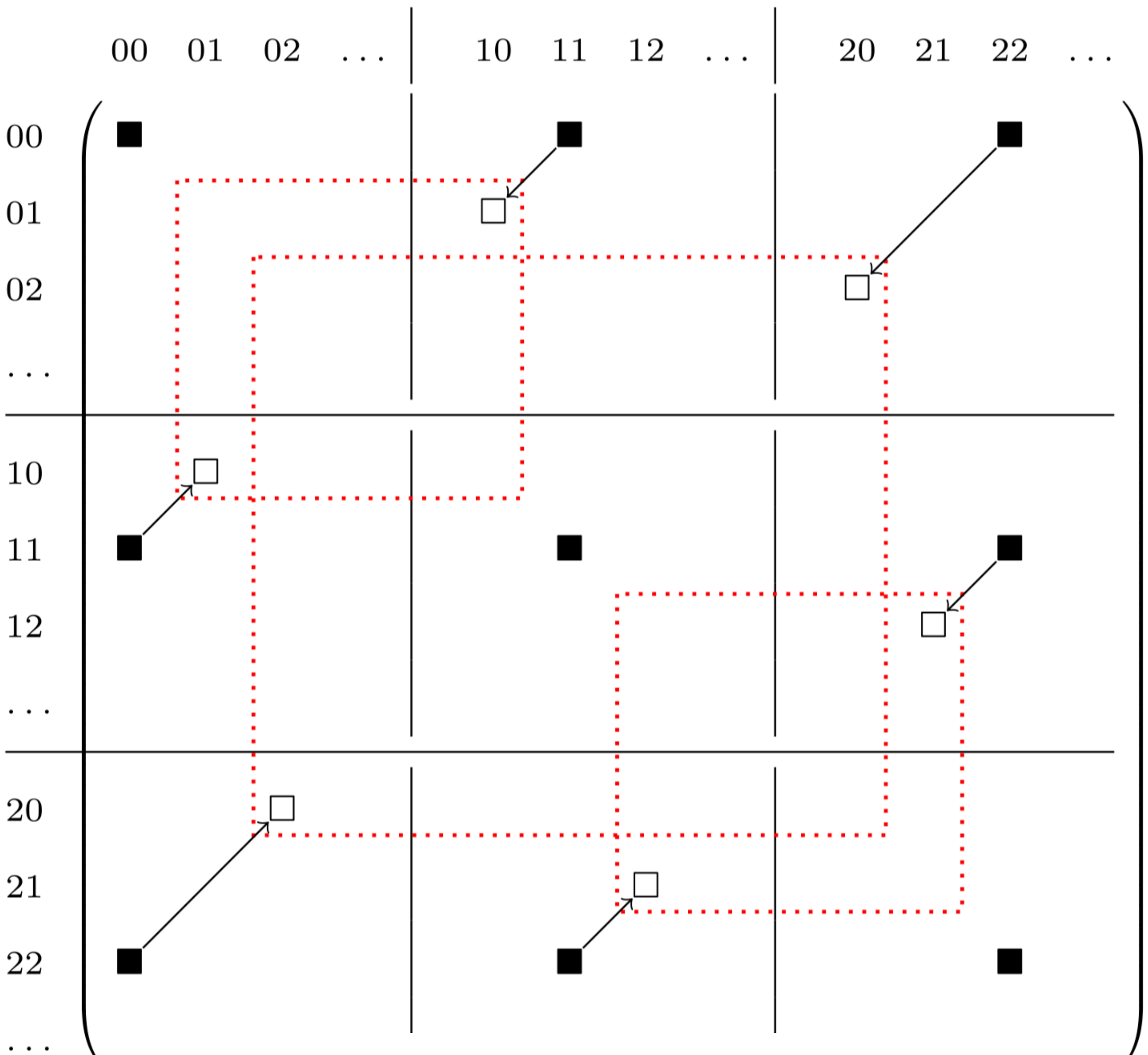
$$N = gt|c_{01}| + g^2 t^2 |c_{02}| + o(g^2 t^2)$$

$$S_L = 2g^2 t^2 (c_{11} - |c_{01}|^2) + o(g^2 t^2)$$

$$||\varrho_{is} - \tilde{\varrho}_{is}|| \propto g^2 t^2 \{\exp(4gt\sqrt{\mathrm{tr}[\varrho_p a_p^\dagger a_p]}) - 1\}$$

# NEGATIVITY – МЕРА ЗАПУТАННОСТИ ДЛЯ СМЕШАННЫХ СОСТОЯНИЙ.

$N = 0,\ \varrho_{is} = \sum_k p_k \varrho_i^{(k)} \otimes \varrho_s^{(k)}$ в то время как для запутанных состояний $N > 0$




$$N = \sum_{m<n} \left| \varrho_{is}^{nm} \right|$$

- Транспонирование по отношению к $S$

$$\varrho_{is}^{T_s} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \varrho_{is}^{nm} |n_i m_s\rangle\langle m_i n_s|$$

- Рассмотрим подматрицы: $n' \neq m'$

$$\langle n_i' n_s' | \varrho_{is}^{T_s} | n_i' n_s' \rangle = \langle m_i' m_s' | \varrho_{is}^{T_s} | m_i' m_s' \rangle = 0$$

- Определитель подматрицы:

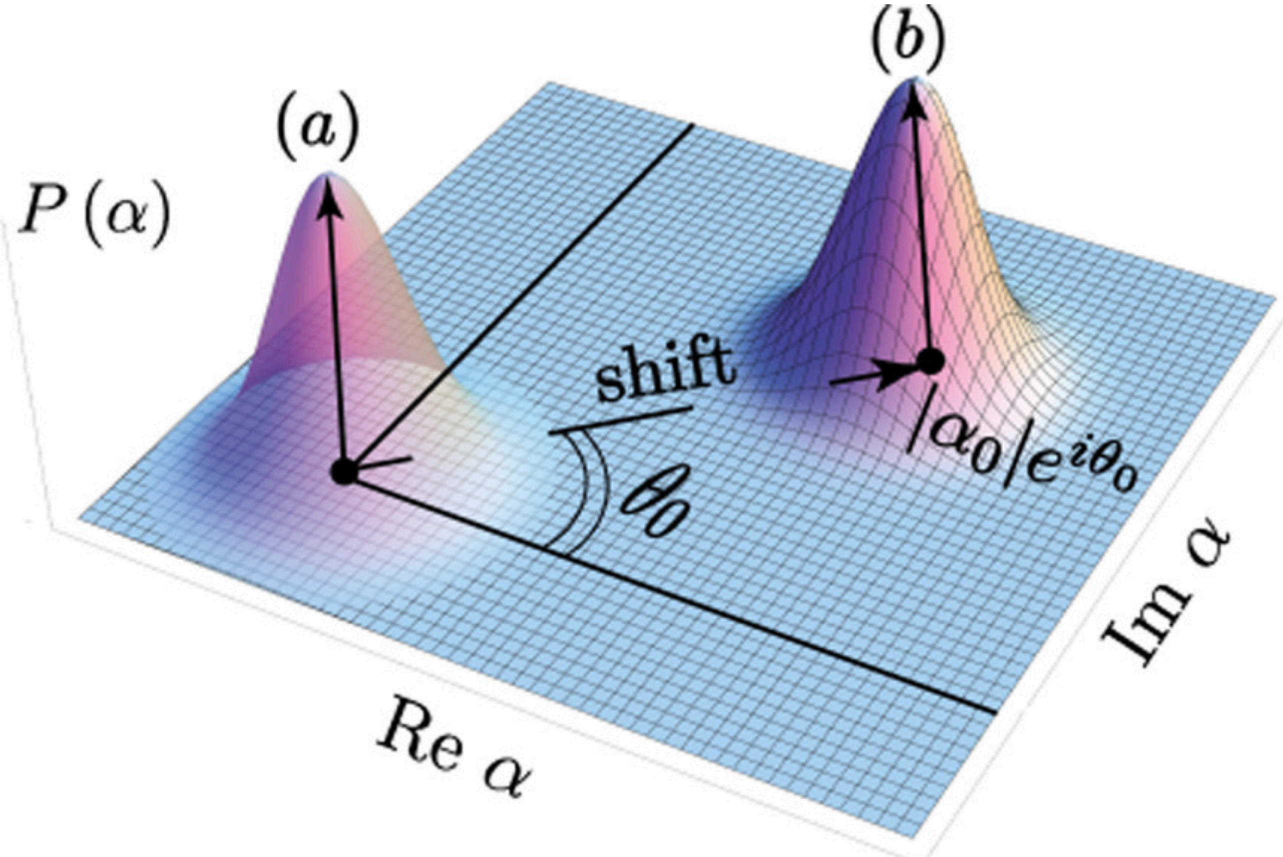
$$-|\varrho_{is}^{n'm'}|^2 \leqslant 0$$

- Критерий Переса - Городецкого:

$\sum_{m'<n'} |\varrho_{is}^{n'm'}| > 0$ Состояние запутанно

$\sum_{m'<n'} |\varrho_{is}^{n'm'}| = 0$ Сост. сепарабельно

# ТИПЫ НАКАЧКИ: ТЕПЛОВАЯ И СМЕЩЁННАЯ ТЕПЛОВАЯ (ТЕОРИЯ ВОЗМ.)

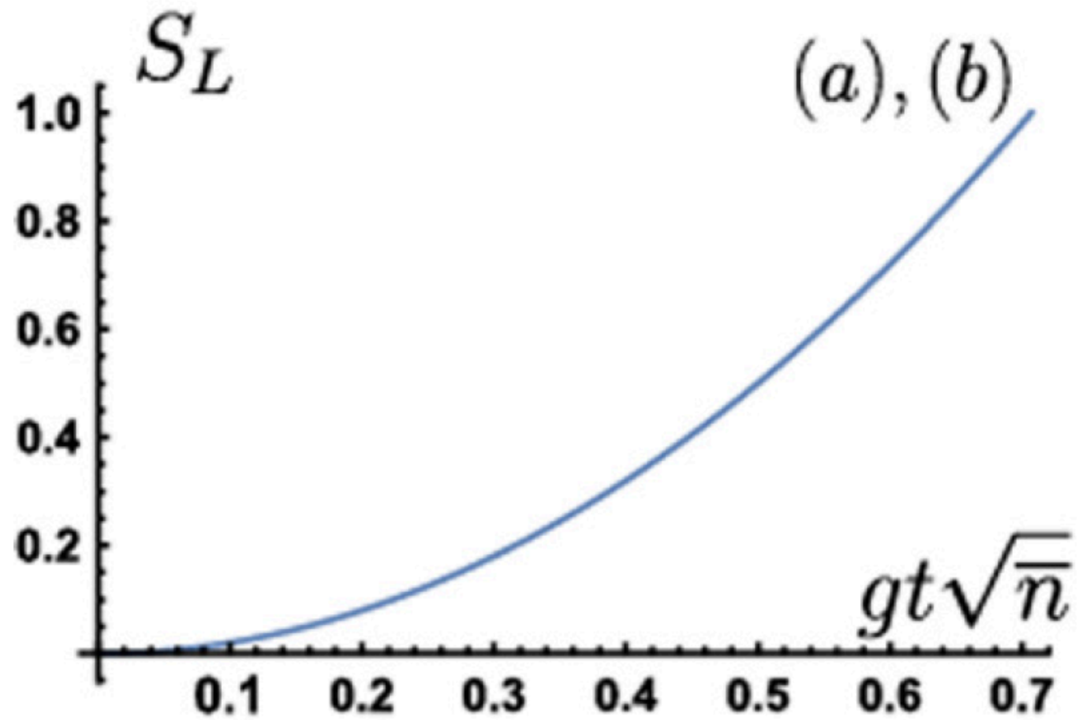


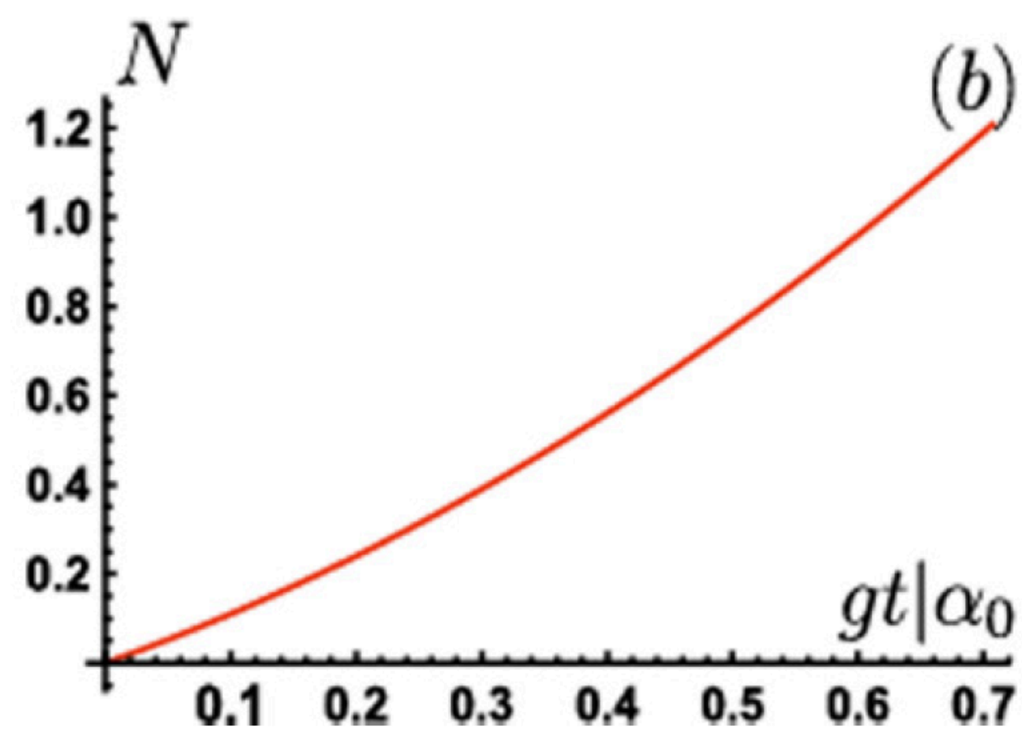

(a) $$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \overline{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\overline{n}}\right)$$

$$N = 0 \qquad S_L = 2\overline{n}(gt)^2 + o(g^2t^2)$$

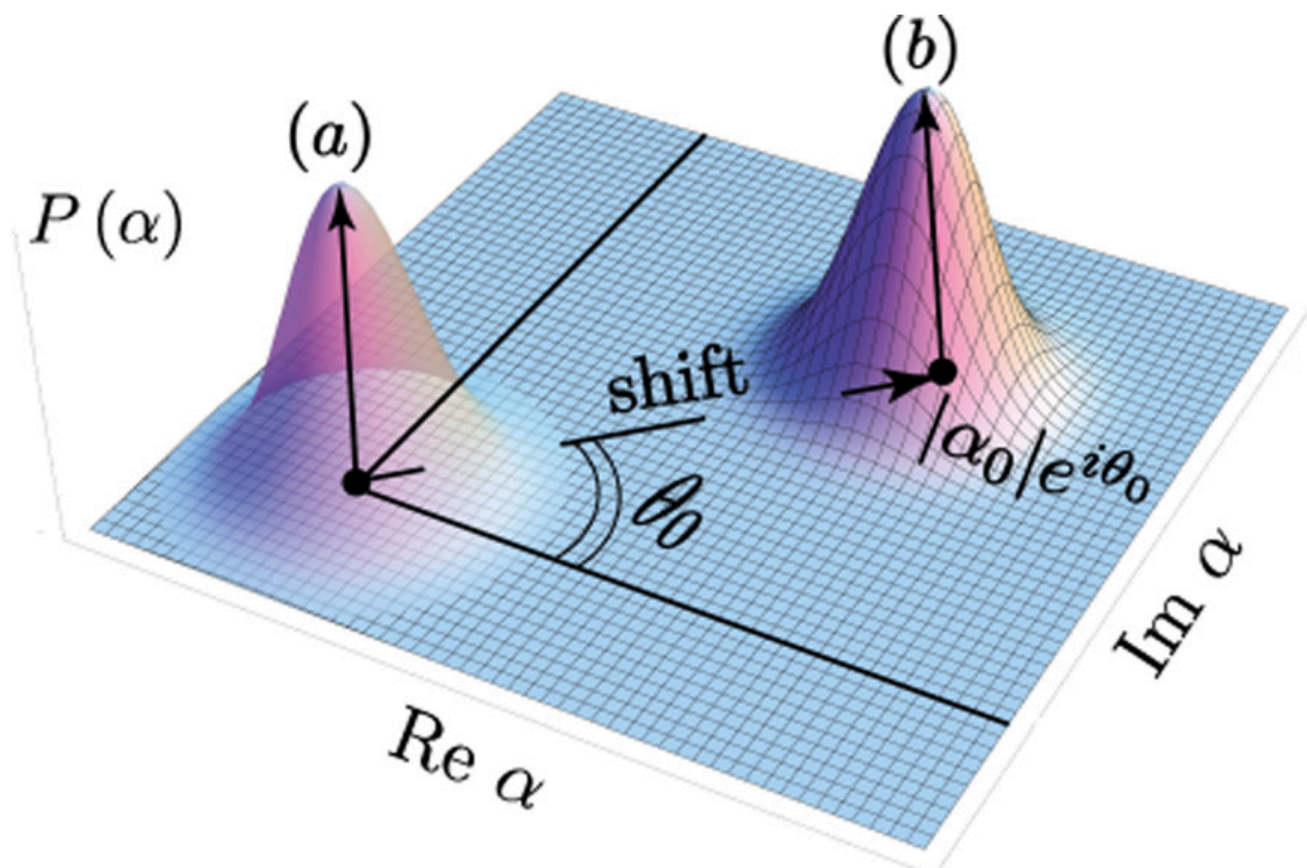
(b) $$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \overline{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha - \alpha_0|^2}{\overline{n}}\right)$$

$$N = gt|\alpha_0| + (gt|\alpha_0|)^2 + o(g^2t^2)$$



# ТИПЫ НАКАЧКИ: ТЕПЛОВАЯ И СМЕЩЁННАЯ ТЕПЛОВАЯ(ПП)




$$(a)\ P(\alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}\right)$$

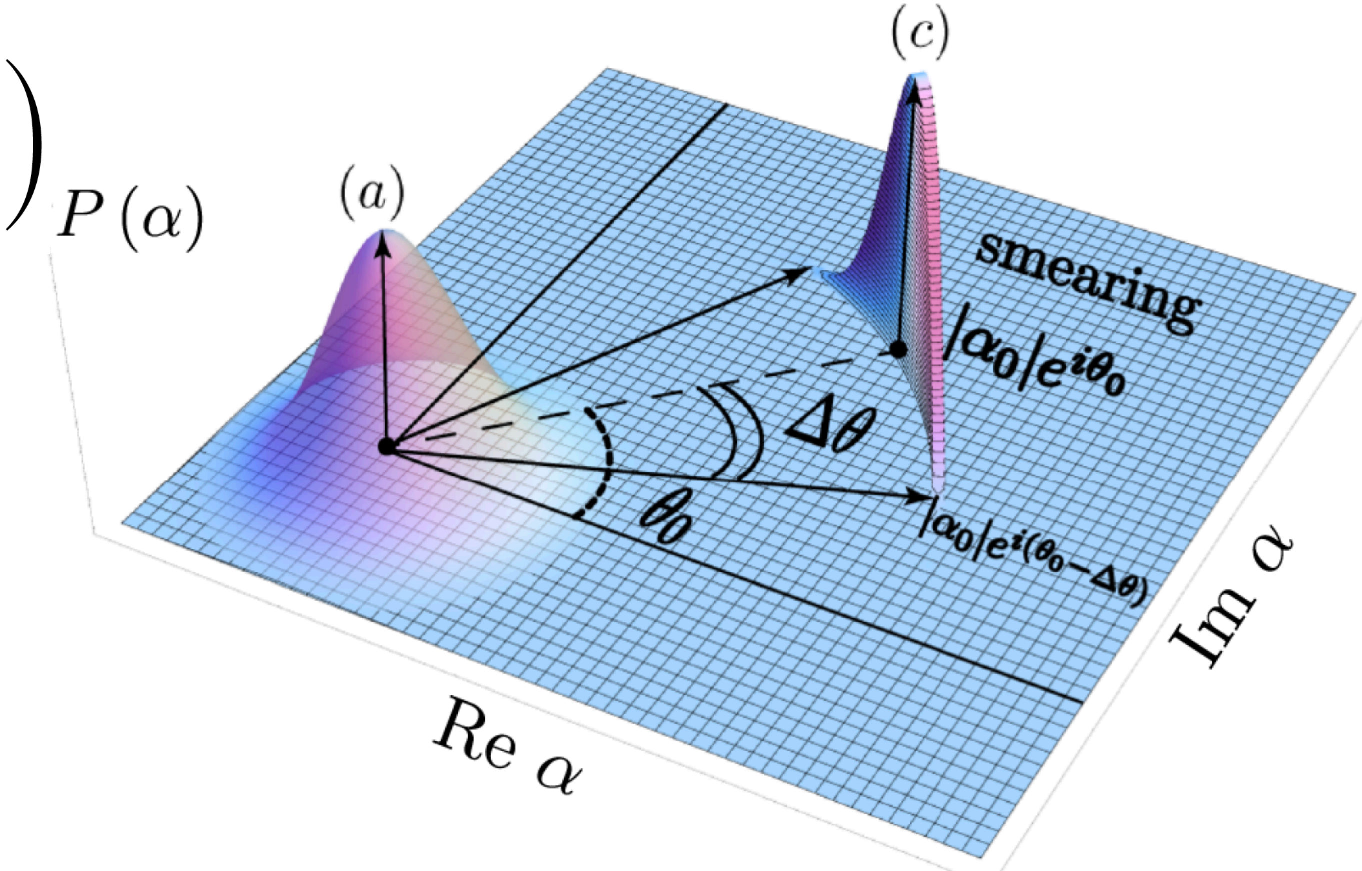
$$(b)\ P(\alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha - \alpha_0|^2}{\bar{n}}\right)$$

$$N = gt|\alpha_0| + g^2t^2|\alpha_0|^2 + \frac{2}{3}g^3t^3|\alpha_0|^3\left(1 - \frac{\bar{n}}{|\alpha_0|^2}\right)$$

$$+ o(g^3t^3|\alpha_0|^3).$$

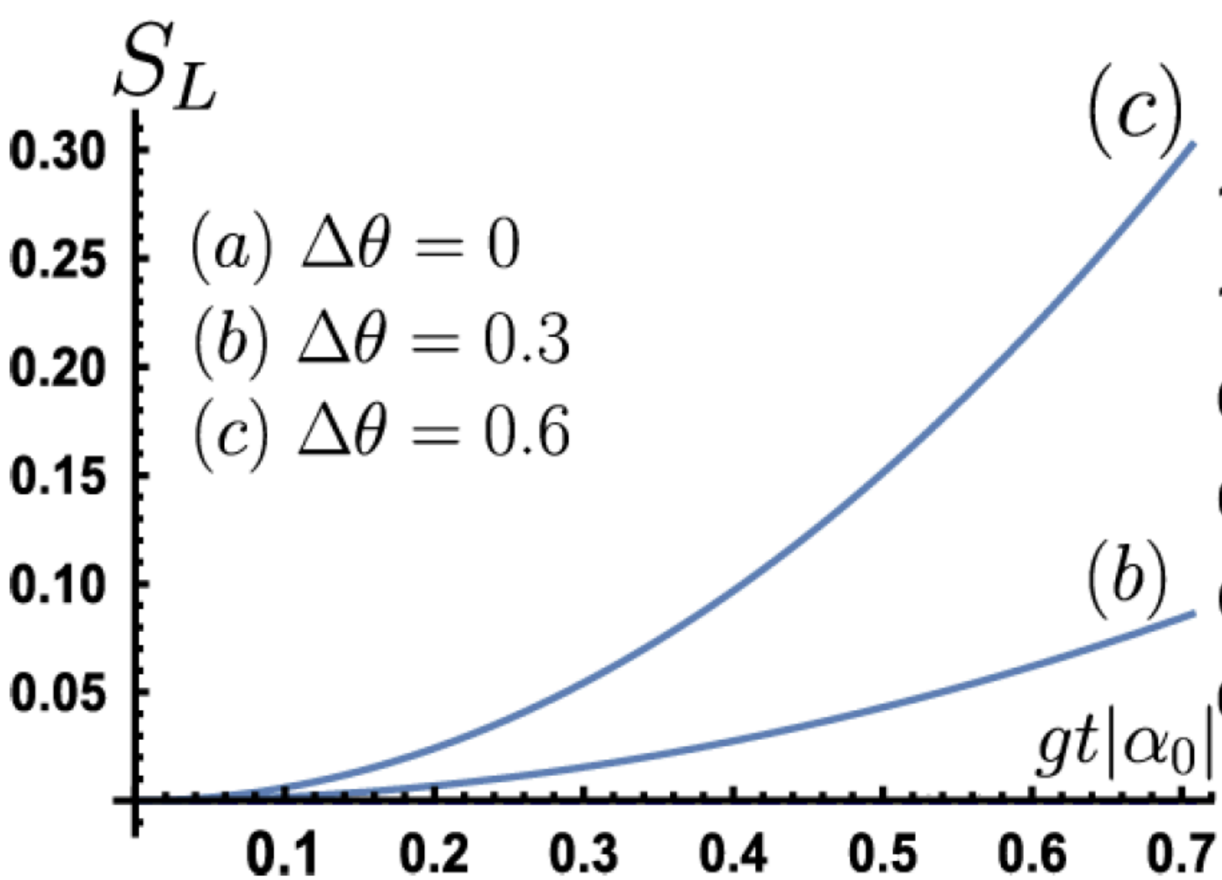
# ТИПЫ НАКАЧКИ: НАКАЧКА С “РАЗМЫТИЕМ” ФАЗЫ (ТЕОРИЯ ВОЗМ.)

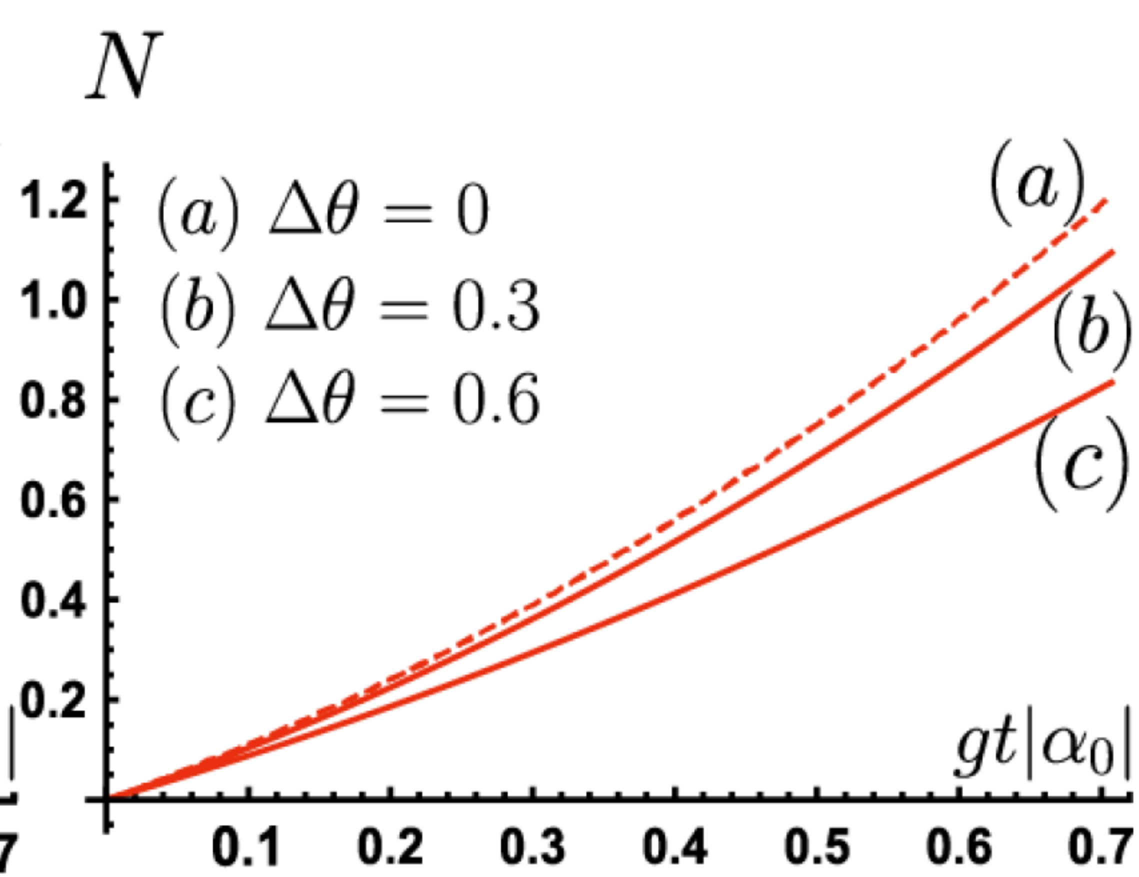
$$P(|\alpha|e^{i\theta}) = \frac{\delta(|\alpha| - |\alpha_0|)}{|\alpha_0|\sqrt{2\pi(\Delta\theta)^2}} \exp\left(-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2(\Delta\theta)^2}\right)$$




$$S_L = 2|\alpha_0|^2(gt)^2(1 - e^{-(\Delta\theta)^2}) + o(g^2t^2),$$

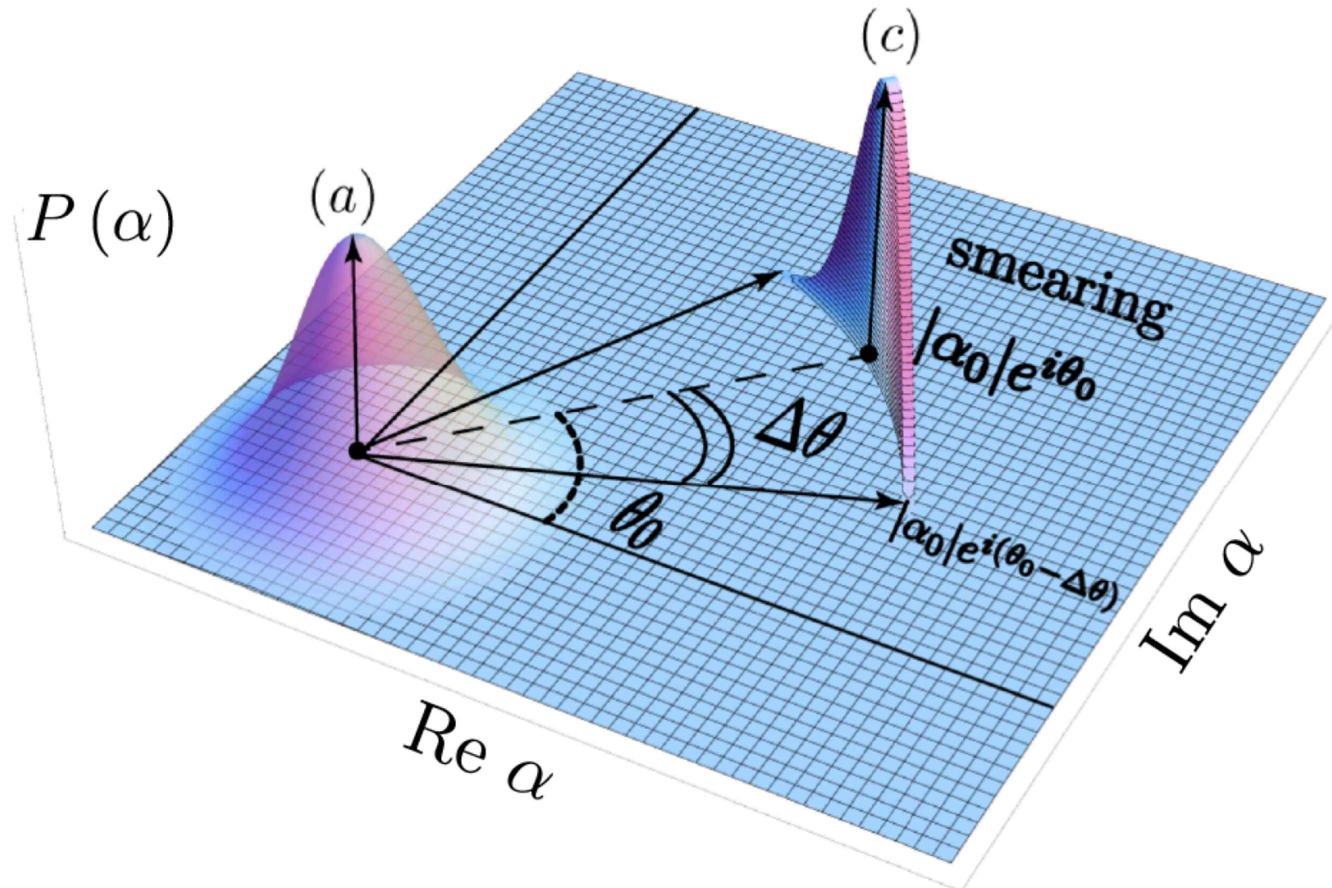
$$N = gt|\alpha_0|e^{-(\Delta\theta)^2/2} + (gt|\alpha_0|)^2 e^{-2(\Delta\theta)^2} + o(g^2t^2).$$



# ТИПЫ НАКАЧКИ: НАКАЧКА С “РАЗМЫТИЕМ” ФАЗЫ (ПП)

$$P(|\alpha|e^{i\theta}) = \frac{\delta(|\alpha| - |\alpha_0|)}{|\alpha_0|\sqrt{2\pi(\Delta\theta)^2}} \exp\left(-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2(\Delta\theta)^2}\right)$$




$$S_L = \frac{2}{1+|\lambda(\alpha_0)|^2}\left\{|\lambda(\alpha_0)|^2 - [1-|\lambda(\alpha_0)|^2]\right.$$

$$\left.\times \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda(\alpha_0)|^{2k} e^{-k^2(\Delta\theta)^2}\right\},$$

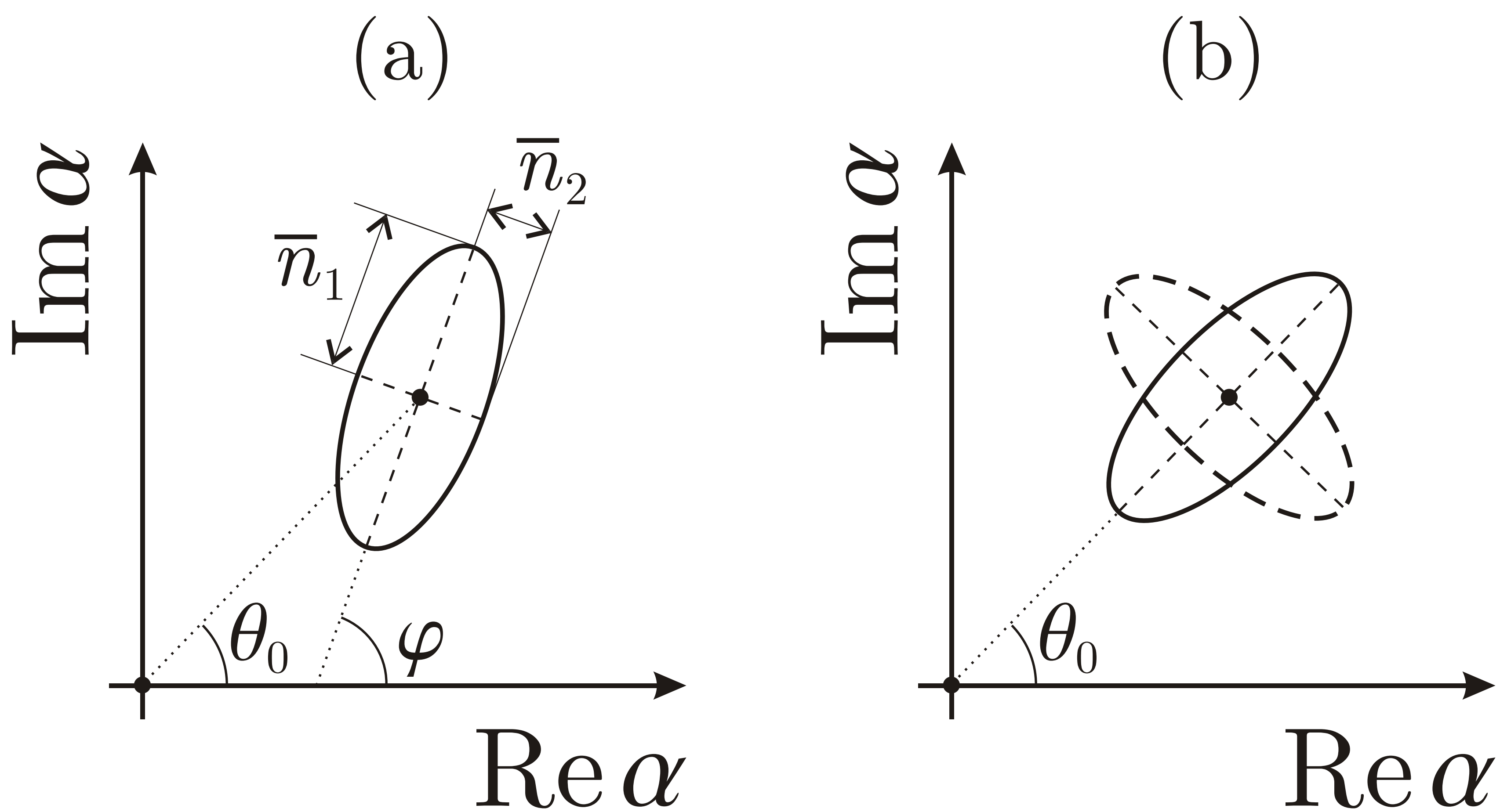
$$N \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda(\alpha_0)|^k \left[1 - \frac{k^2(\Delta\theta)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{|\lambda(\alpha_0)|}{1-|\lambda(\alpha_0)|}\left[1 - \frac{[1+|\lambda(\alpha_0)|](\Delta\theta)^2}{2[1-|\lambda(\alpha_0)|]^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2gt|\alpha_0|} - 1)\left[1 - (e^{4gt|\alpha_0|} + e^{2gt|\alpha_0|})\frac{(\Delta\theta)^2}{4}\right].$$

# ТИПЫ НАКАЧКИ: ФАЗО-ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЙ ГАУССОВ ШУМ (ТЕОРИЯ ВОЗМ.)

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi\sqrt{\overline{n}_1\overline{n}_2}} \exp\left(-\frac{\{\mathrm{Re}[(\alpha-\alpha_0)e^{-i\varphi}]\}^2}{\overline{n}_1} - \frac{\{\mathrm{Im}[(\alpha-\alpha_0)e^{-i\varphi}]\}^2}{\overline{n}_2}\right)$$

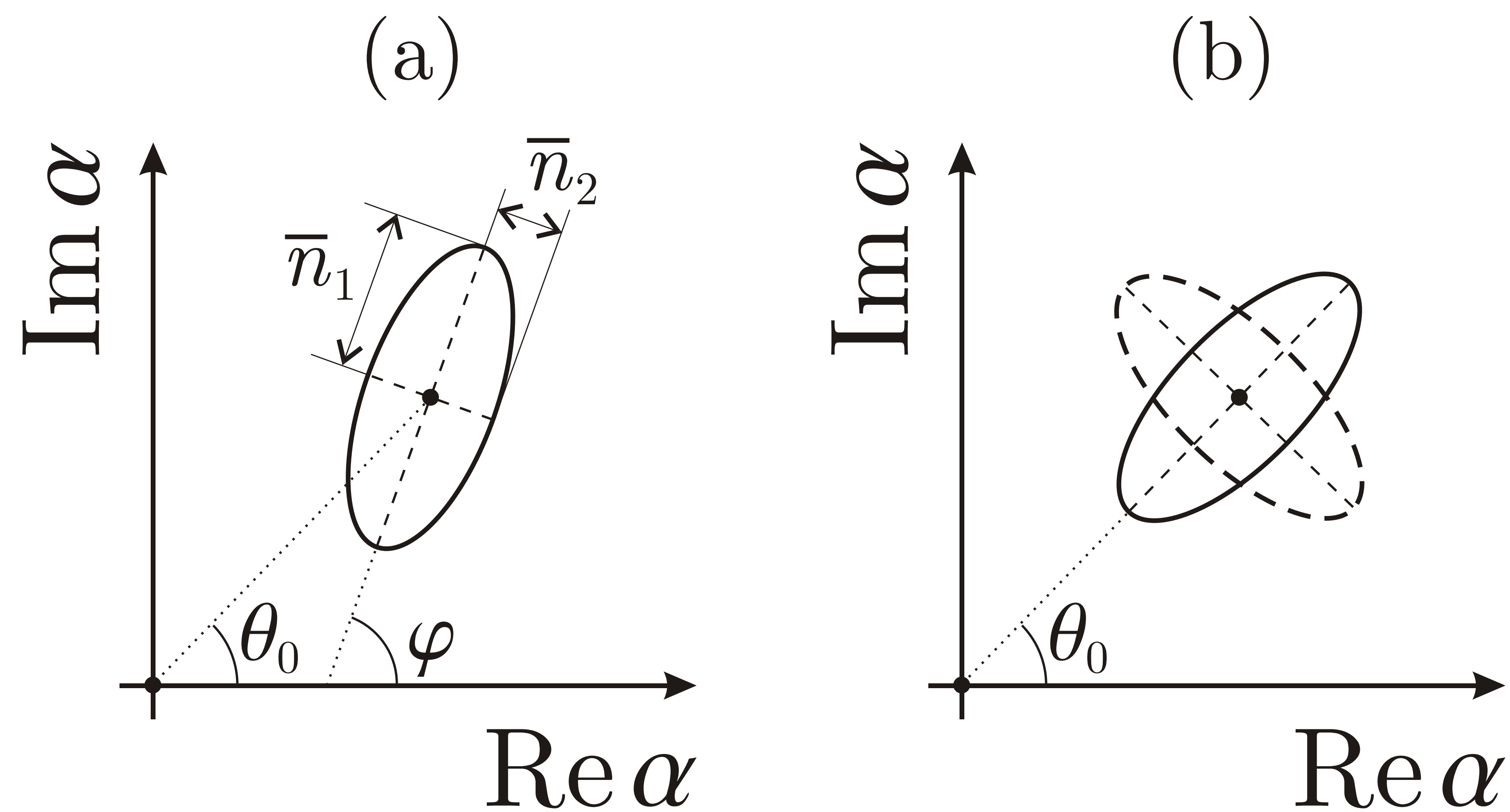



$$S_L = (\overline{n}_1 + \overline{n}_2)(gt)^2 + o(g^2t^2)$$

$$N = gt|\alpha_0| + (gt|\alpha_0|)^2\sqrt{1 + \frac{\overline{n}_1 - \overline{n}_2}{|\alpha_0|^2}\cos 2(\theta_0 - \varphi) + \left(\frac{\overline{n}_1 - \overline{n}_2}{2|\alpha_0|^2}\right)^2}$$

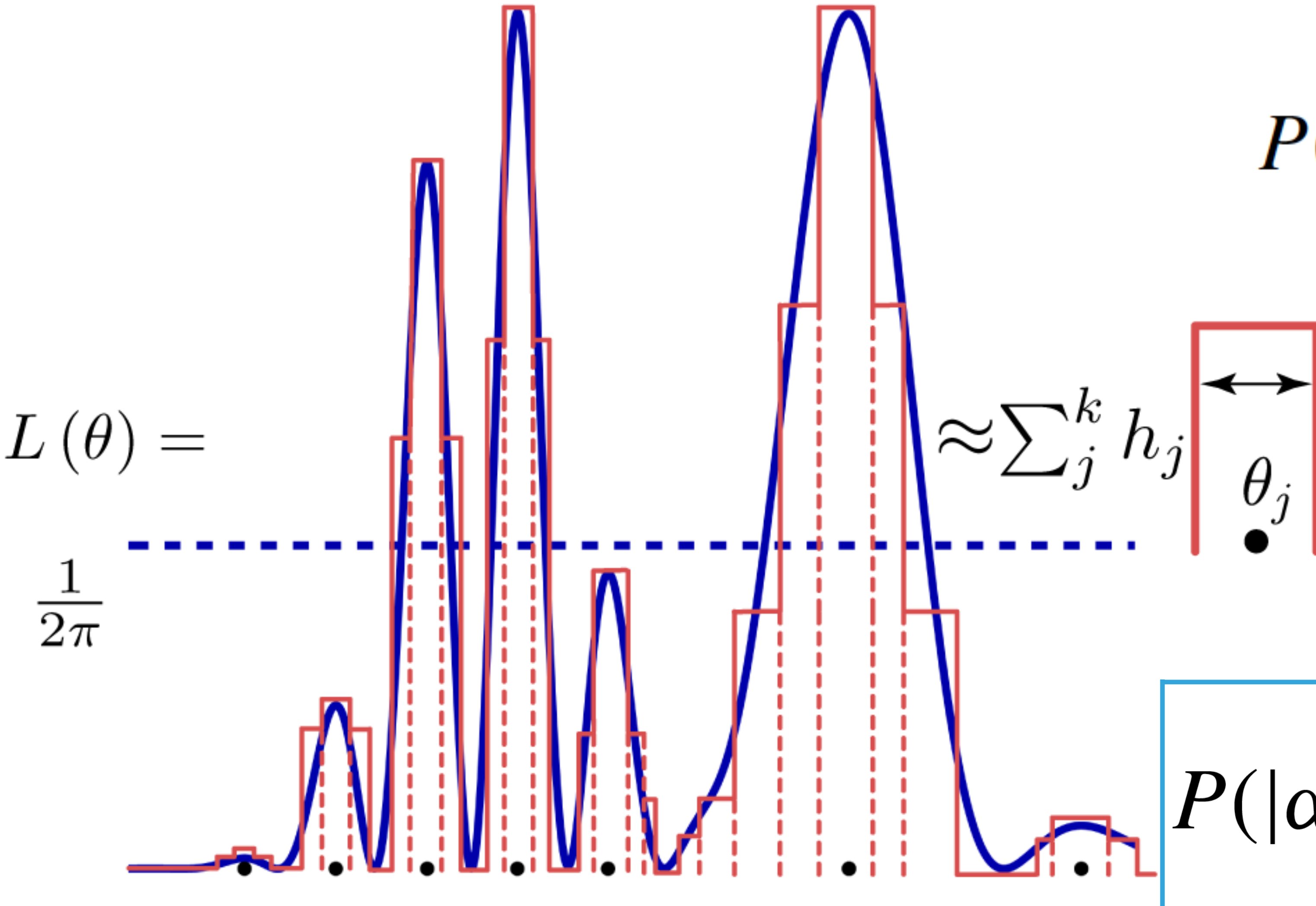
# ТИПЫ НАКАЧКИ: ФАЗО-ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЙ ГАУССОВ ШУМ (ПП)

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi\sqrt{\overline{n}_1\overline{n}_2}} \exp\left(-\frac{\{\mathrm{Re}[(\alpha-\alpha_0)e^{-i\varphi}]\}^2}{\overline{n}_1} - \frac{\{\mathrm{Im}[(\alpha-\alpha_0)e^{-i\varphi}]\}^2}{\overline{n}_2}\right)$$




$$N = gt|\alpha_0| + g^2t^2|\alpha_0|^2 + \frac{2}{3}g^3t^3|\alpha_0|^3\left(1 - \frac{\overline{n}}{|\alpha_0|^2}\right) + o(g^3t^3|\alpha_0|^3).$$

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ НАКАЧКИ




$$P(|\alpha|e^{i\theta}) = \frac{\delta(|\alpha| - |\alpha_0|)}{|\alpha_0|} L(\theta)$$

$$\boxed{L(\theta) \approx \sum_{j=1}^{k} h_j u_j(\theta)}$$

$$\boxed{P(|\alpha|e^{i\theta}) = \sum_r \lambda_r A_r(|\alpha|) L_r(\theta)}$$

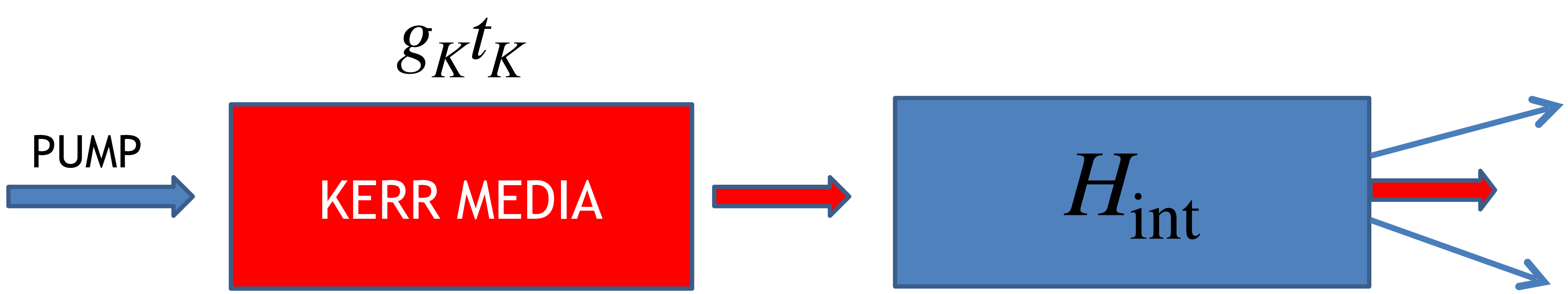
$$c_{mn} = |\alpha_0|^{m+n} \sum_{j=1}^{k} h_j \operatorname{sinc}\left[\frac{1}{2}\Delta\theta_j(m-n)\right] e^{i\theta_j(m-n)}$$

$$S_L \approx 2g^2t^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta'')$$

$$N \approx gt|\alpha_0|| \cos \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta'')| + (gt|\alpha_0|)^2 | \cos(\theta' - \theta'')|$$

# ТИПЫ НАКАЧКИ:МОДУЛИРОВАННАЯ НАКАЧКА В КЕРРОВСКОЙ СРЕДЕ

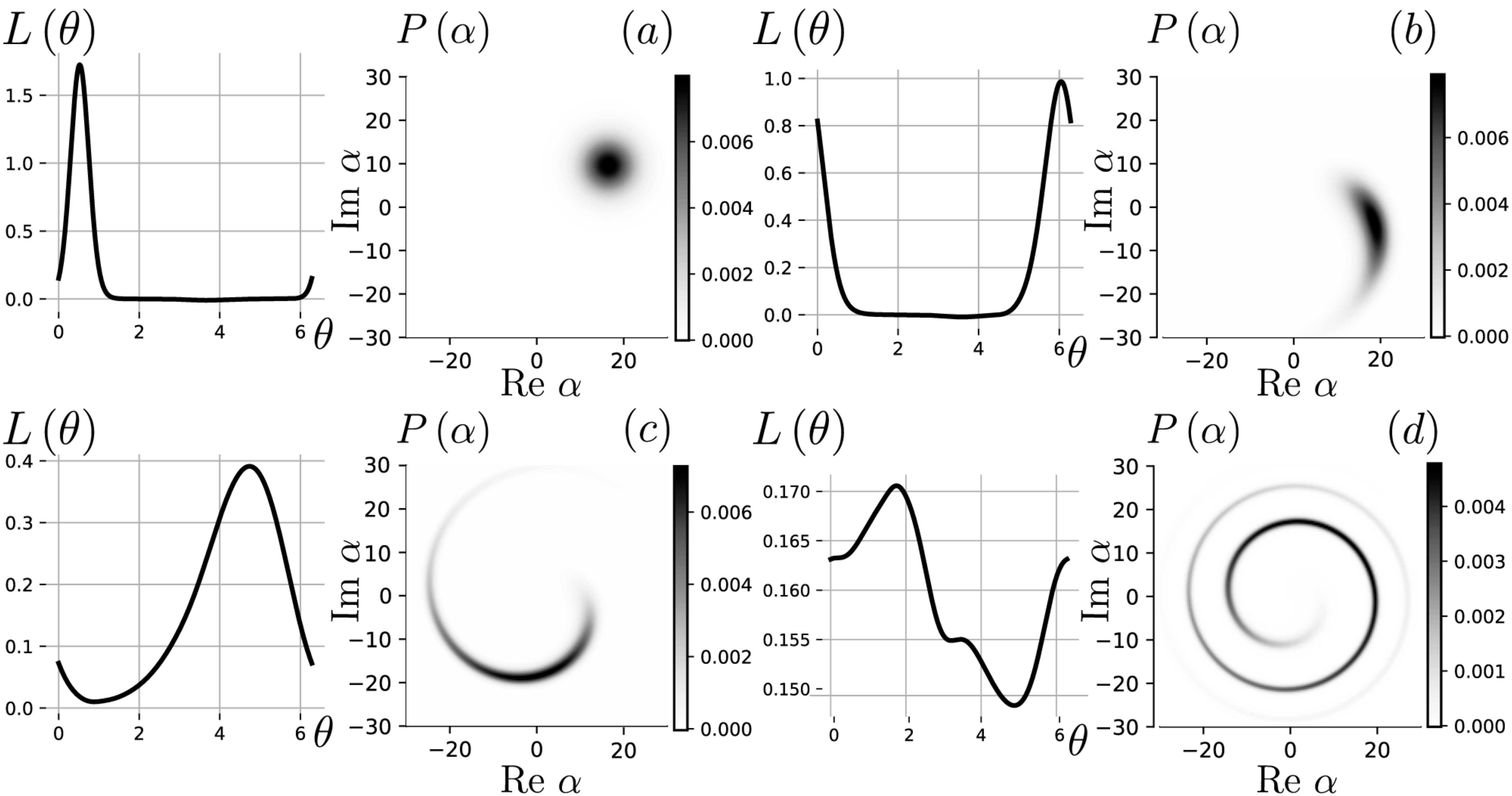
PUMP $\varrho_p = \frac{1}{\pi \bar{n}} \int e^{-|\beta - \beta_0|^2/\bar{n}} |\beta><\beta| d^2\beta$




$$U = e^{-i g_K t_K n_p (n_p - 1)}$$

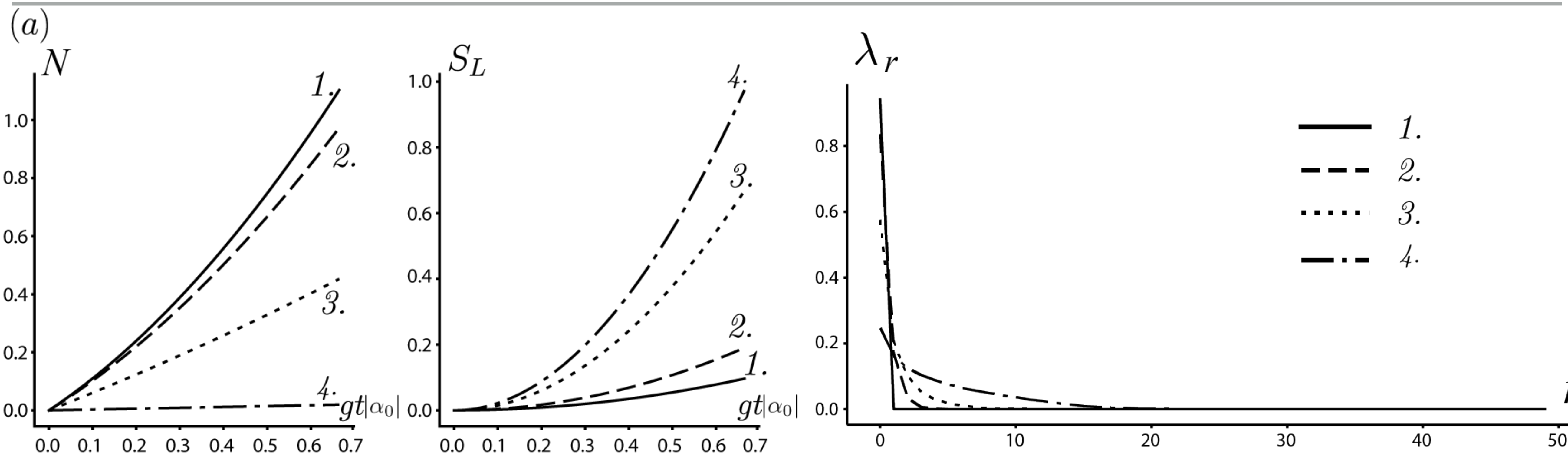
$$P(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int Q(\xi) \exp\left(\frac{|\xi|^2}{4} + \frac{\xi\alpha^* + \xi^*\alpha}{2}\right) d^2\xi \quad Q(\xi) = \pi^{-1} \langle \xi | \tilde{\varrho}_p | \xi \rangle$$

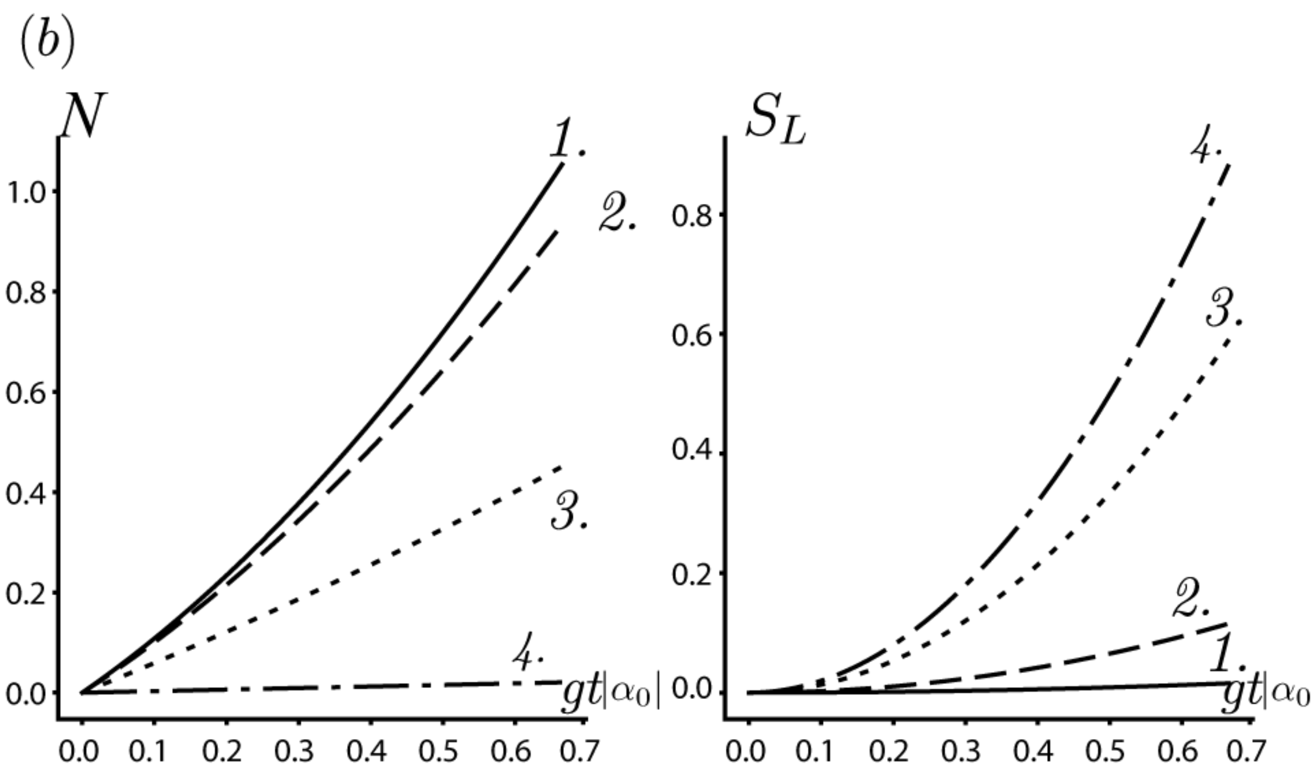
# ТИПЫ НАКАЧКИ:МОДУЛИРОВАННАЯ НАКАЧКА В КЕРРОВСКОЙ СРЕДЕ




$$\Delta\theta_{\text{dis th}} \sim \sqrt{\frac{\overline{n}}{|\alpha_0|^2} + (g_K t_K)^2 |\alpha_0|^2 (2\overline{n} + 1)}$$

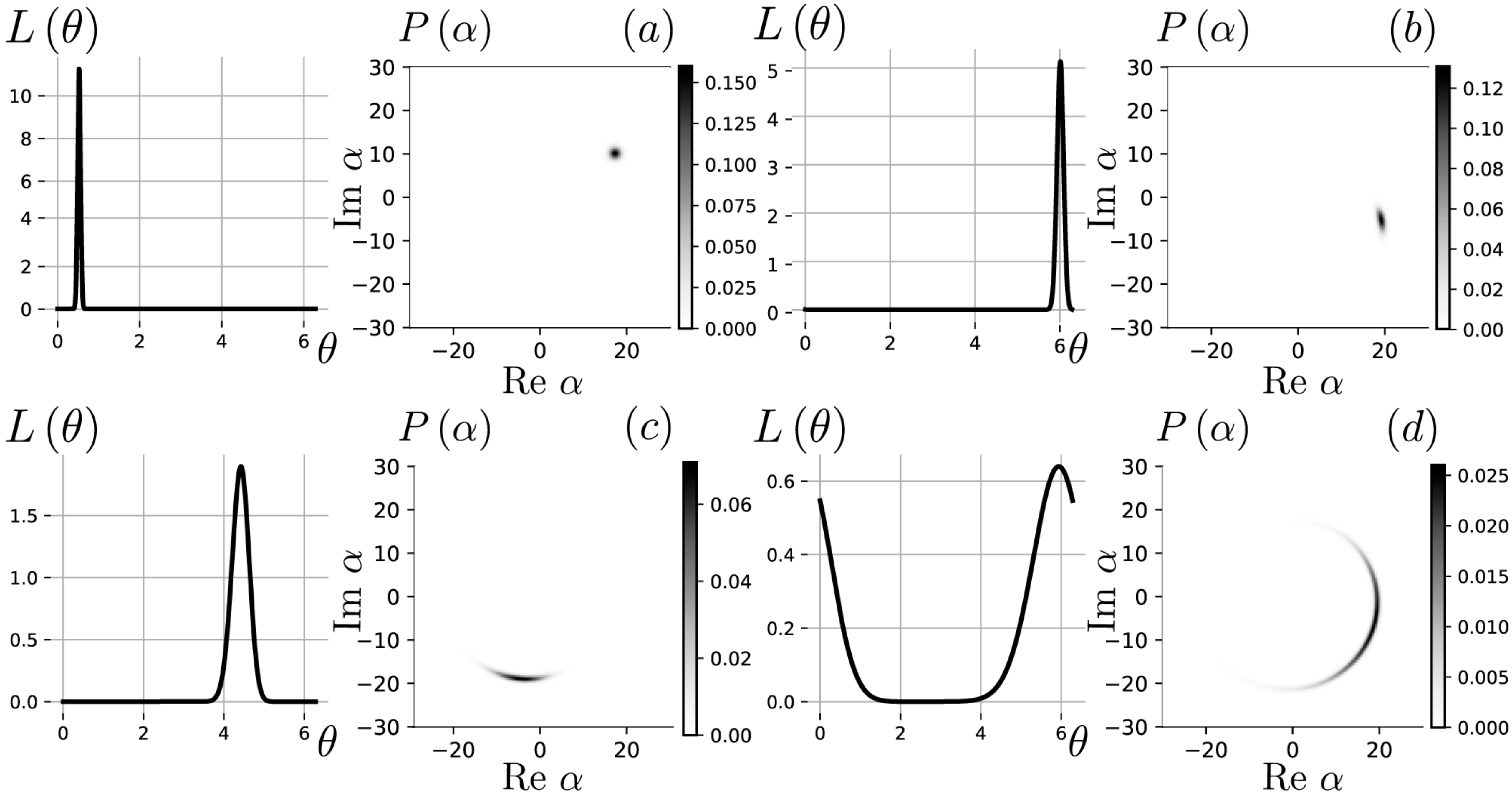
# ТИПЫ НАКАЧКИ:МОДУЛИРОВАННАЯ НАКАЧКА В КЕРРОВСКОЙ СРЕДЕ




$$P(|\alpha|e^{i\theta}) = \sum_r \lambda_r A_r(|\alpha|) L_r(\theta)$$

# ТИПЫ НАКАЧКИ:МОДУЛИРОВАННАЯ НАКАЧКА В КЕРРОВСКОЙ СРЕДЕ




$$\varrho_p = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0| \qquad \Delta\theta_{\mathrm{coh}} \sim g_K t_K |\alpha_0|$$

# ТИПЫ НАКАЧКИ:МОДУЛИРОВАННАЯ НАКАЧКА В КЕРРОВСКОЙ СРЕДЕ

## СМЕЩЁННАЯ ТЕПЛОВАЯ НАКАЧКА

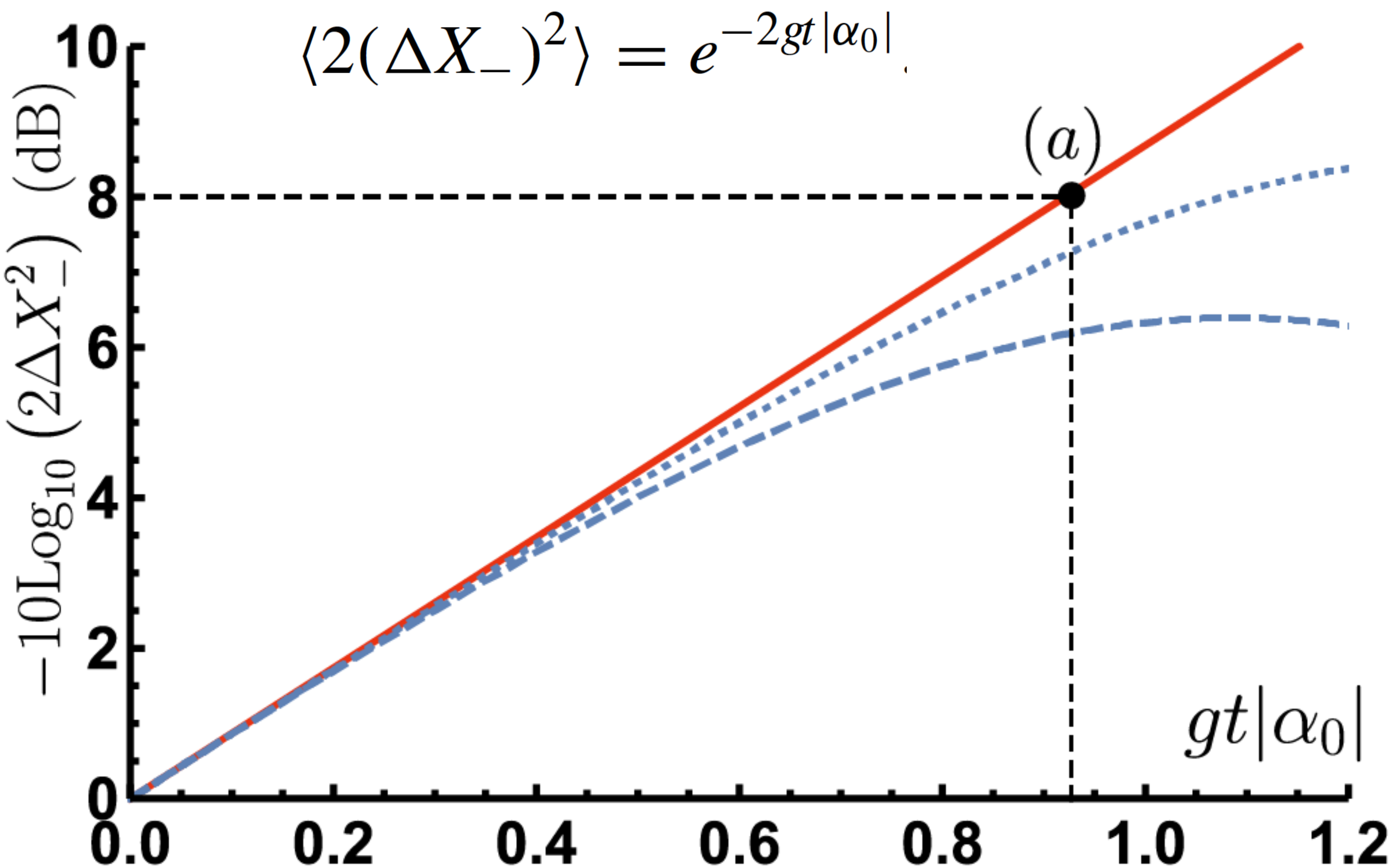
$$L_{\mathrm{dis\ th}}(\theta) = \frac{e^{-|\alpha_0|^2/\bar{n}}}{4\pi\bar{n}} \sum_{\substack{k,l=0,1,2,\ldots \\ k+l \text{ is even}}} \frac{\Gamma\left(\frac{3k+l+4}{4}\right)}{\left(\frac{k+l}{2}\right)!\left(\frac{k-l}{2}\right)!} \left(\frac{|\alpha_0|^2\bar{n}}{\bar{n}+1}\right)^{(k-l)/4} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}\right)^{(k+l+2)/2} {}_1F_1\left(\frac{3k+l+4}{4}; \frac{k-l+2}{2}; \frac{|\alpha_0|^2}{\bar{n}(\bar{n}+1)}\right)$$

$$\times \exp\left\{-i[\theta-\theta_0+g_K t_K(k+l-1)]\frac{k-l}{2}\right\}$$

## КОГЕРЕНТНАЯ НАКАЧКА

$$L_{\mathrm{coh}}(\theta) = e^{-|\alpha_0|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_0|^{2k}}{4\pi k!} D_k(\theta-\theta_0+g_K t_K(2k-1)),$$

# ВЛИЯНИЕ НАКАЧКИ НА КВАДРАТУРЫ (СЖАТИЕ)




$$\langle 2(\Delta X_-)^2 \rangle = e^{-2gt|\alpha_0|} + \frac{\overline{n}}{4|\alpha_0|^2}\left[\sinh 2gt|\alpha_0| + 2gt|\alpha_0|(2gt|\alpha_0| - 1)e^{-2gt|\alpha_0|}\right].$$

$$\langle 2(\Delta X_-)^2 \rangle = e^{-2gt|\alpha_0|} + (1 - e^{-(\Delta\theta)^2/2}) \sinh 2gt|\alpha_0|$$

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Угловое распределение в фазовом пространстве (фазовый шум) накачки приводит к ухудшению свойств запутанности и параметров сжатия.
- Получены аналитические выражения и разработаны методы, позволяющие оценить характеристики ($N$, $S_L$) состояния фотонов в процессе параметрического рассеяния (как в рамках теории возмущений (бифотоны), так и в случае обобщ. параметрического приближения ) с некогерентной квантованной накачкой.

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ